شبکه مشغول است

چگونه دانش احتمال به حل مسائل زندگی کمک می‌کند؟

• نازنین حسن‌نیا
• عکاس: شادی رضائی

«احتمال دارد فردا بیایم.» «ممکن است برف ببارد.» «چند درصد احتمال دارد با ترافیک مواجه شوی؟» «چقدر احتمال دارد ...؟»

هر روز در میان گفت‌وگوهایمان، کلمهٔ «احتمال» را می‌شنویم. وقتی وارد رشتهٔ ریاضی شدم، نمی‌دانستم که روزی با دانش احتمال آشنا خواهم شد. نمی‌دانستم که احتمال یکی از شاخه‌های ریاضی است. برای آشنایی بیشتر، با ریاضی‌دانان جوانی که در این شاخه پژوهش می‌کنند گفت‌وگویی کردم و متوجه شدم دانشمندان ریاضی خیلی از مسائل دنیای پیشرفتهٔ امروز را با این علم مطالعه می‌کنند و برای آن‌ها راه‌حل ارائه می‌دهند. اگر شما هم دوست دارید بدانید که در پشت بسیاری از مسائل زندگی شهری مثل ترافیک یا شلوغی خطوط تلفن همراه و ... چه دانشمندانی مشغول هستند، گفت‌وگوی ما با خانم محدثه رجائی و آقای دکتر میرامید حاجی‌میرصادقی و آقای دکتر علی خزلی و آقای دکتر کسری علیشاهی را بخوانید.

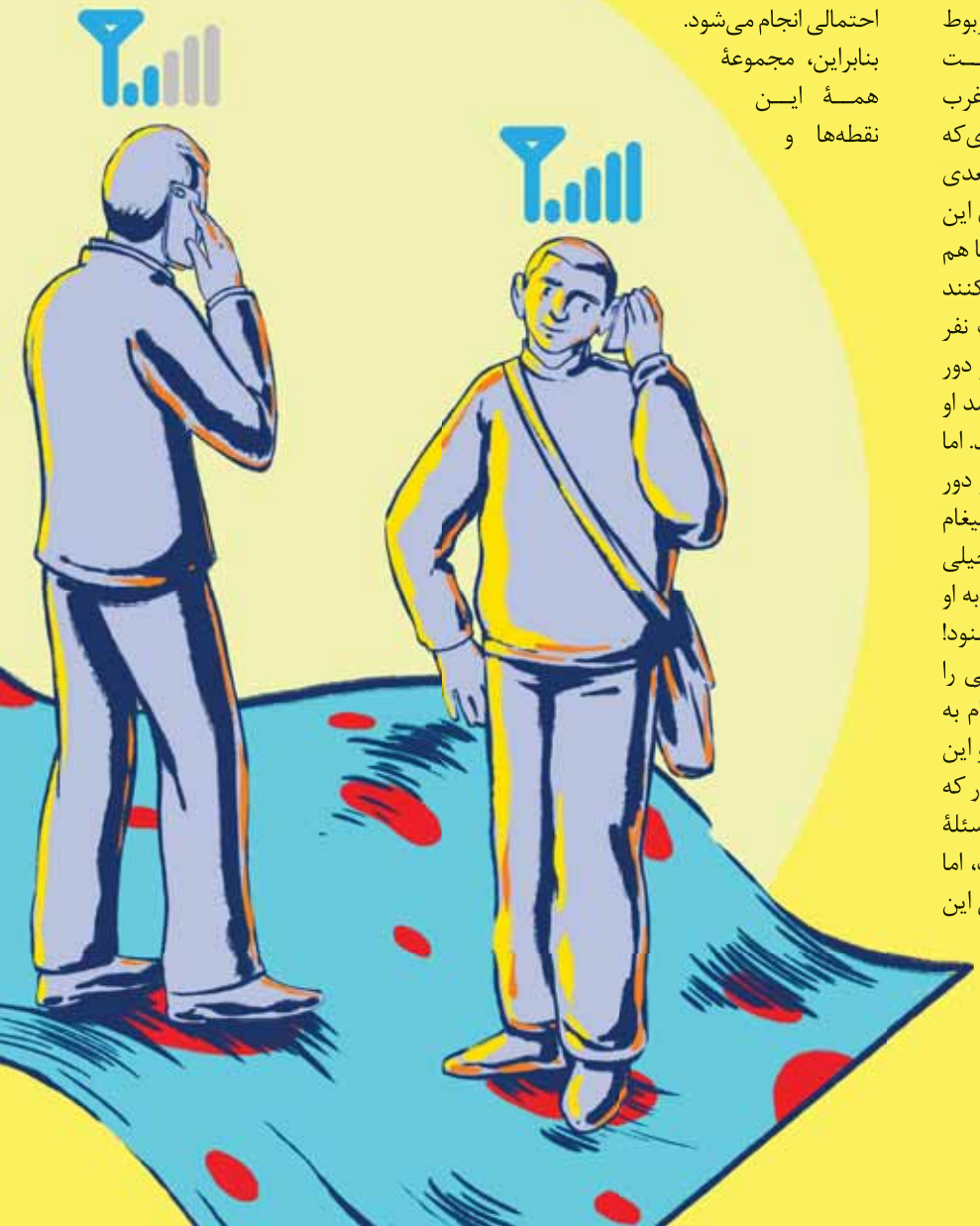
• **برهان:** شنیده‌ایم که شما روی پروژه‌هایی کار می‌کنید که در ظاهر ربط چندانی با ریاضی ندارند. پروژه‌هایی با موضوع موبایل و ترافیک و ... کمی دربارهٔ کارهایتان توضیح می‌دهید؟

• **علیشاهی:** خیلی از ما با نقشه‌های ترافیکی آشنا هستیم و از روی رنگ‌های نقشه، وضعیت ترافیک هر خیابان را می‌فهمیم. شما از روی نقشه فقط می‌توانید ببینید کجا شلوغ هست یا کجا ترافیک کمتری دارد؛ اما کارِ گروهِ پژوهشی ما این است که با کمک دانش احتمال و آمار به سؤال‌هایی دربارهٔ چگونگی جابه‌جایی مردم در شهر پاسخ دهیم: می‌خواهیم

بفهمیم که مردم در چه ساعت‌هایی چه سفرهایی انجام می‌دهند و مبدأ و مقصد سفرهای شهری آن‌ها کجاست. این اطلاعات برای نهادهایی مانند شهرداری و پلیس راهنمایی و رانندگی در برنامه‌ریزی شهری بسیار ضروری است. برای مثال زمان‌بندی چراغ‌های هوشمند راهنمایی و رانندگی یا تعیین مسیر خطوط اتوبوسرانی یا زمان‌بندی فاصلهٔ حرکت قطارهای مترو با کمک این اطلاعات انجام می‌شود.

• **میرصادقی:** من چند سال قبل روی مسئله‌ای کار می‌کردم که به سیستم‌های موبایل مربوط می‌شد. فرض کنید قرار است پیغامی از شرق شهر به غرب شهر منتقل شود، به طوری‌که هر کس پیغام را شنید به نفر بعدی بگوید. باز فرض کنید آدم‌های این شهر دائم در حال حرف زدن با هم هستند. یعنی یا پیغام را تکرار می‌کنند یا حرف‌های دیگری می‌زنند. یک نفر را در این شهر در نظر بگیرید. اگر دور و بر او به اندازهٔ کافی ساکت باشد او پیغام را می‌شنود و تکرار می‌کند. اما اگر افراد زیادی نزدیک او باشند و دور و بر او شلوغ باشد، ممکن است پیغام را نشنود و از طرفی اگر اطرافش خیلی خلوت باشد، کسی نیست که به او پیغام را برساند یا پیغام او را بشنود! سؤال این است که چه چیزهایی را باید بدانیم تا بفهمیم آیا این پیغام به طرف دیگر شهر می‌رسد یا نه؟ و این کار چقدر طول می‌کشد؟ همان‌طور که گفتم، این مسئله در ابتدا یک مسئلهٔ کاربردی برای مخابرات بوده است، اما در حال حاضر دانشِ ریاضیِ حل این مسئله برای ما مهم‌تر از خود مسئله شده است.

• **خزلی:** من کمی دربارهٔ این دانش ریاضی توضیح می‌دهم. فرض کنید مردم این شهر را به‌صورت نقاطی در نظر بگیریم که در فضا پخش شده و جابه‌جا می‌شوند. اگر پیغام بین دو نفر از افراد شهر منتقل شود، آن دو را با یک پاره‌خط به هم وصل می‌کنیم. چون نمی‌دانیم که انتقال پیغام بین کدام افراد صورت می‌گیرد، فرض می‌کنیم که این انتقال بین هر دو نفر، اتفاق کاملاً تصادفی است و با یک احتمالی انجام می‌شود. بنابراین، مجموعهٔ همهٔ این نقطه‌ها و پاره‌خط‌های بین آن‌ها یک شکل تصادفی می‌سازد. اسم چنین شکلی، گراف تصادفی است. در ساده‌ترین حالت، می‌توانیم شهر را مثل یک صفحه فرض کنیم. در این صورت یک گراف تصادفی روی صفحه که فضایی دو بُعدی است داریم. اما مسئله‌ای که ما داریم روی آن کار می‌کنیم با این حالت ساده خیلی فرق دارد. در واقع، ما فرض می‌کنیم که نقطه‌های تصادفی که



نشـــان‌دهندهٔ مکان افراد هســـتند در فضایی هستند که خیلی پیچیده‌تر از صفحه اســـت. بعد گراف تصادفی را در نظر می‌گیریم و ویژگی‌های هندســـی آن را مطالعـــه می‌کنیـــم؛ مثل اینکه نقطه‌ها در کجاها به هم وصل شده‌اند یا فاصلهٔ بین نقاط چگونه است. بعد سعی می‌کنیم فقط با توجه به این ویژگی‌ها بفهمیم که آن فضـــای پیچیده‌ای که نقاط به آن تعلق دارند، چه جور فضایی بوده است؛ مثلاً چه بُعدی داشته است. یعنی می‌خواهیم ببینیـــم که اگر این شکل تصادفی را به ما می‌دادند و ما نمی‌دانستیم که نقاط از ابتدا در چه مجموعه‌ای در نظر گرفته شده بـــودند، چه چیـزهایی در مـــورد آن مجموعه می‌توانســـتیم بگوییـــم. پیچیدگی‌های این مســـئله خیلی زیاد است و همه چیز باید با دقت تعریف شود. در واقع، این دیگر یک کار ریاضی محض است، نه کاربردی.

• **برهان:** اصـــراری ندارید که کاربرد داشته باشد یا نداشته باشد؟

• **خزلی:** دســـت‌کم الان این مســـئله کاربردی نیست. ممکن است در آینده کاربرد پیدا کند اما زیبایی ریاضی آن به انـــدازهٔ کافی برای مـــا انگیزه‌بخش هست.

• **برهـــان:** پس انگار همـــهٔ کارها در شـــاخهٔ احتمال به انـــدازهٔ مثال‌های اولتان کاربردی نیست؟

• **میرصادقی:** در این شاخه از ریاضی، گاه بین مفاهیـــم غیرعملی (نظری) و مسائل کاربردی رفت و برگشت وجود دارد. مثـــلاً در احتمال، شـــاخه‌ای به نام هندســـهٔ تصادفی داریم که کاملاً نظری است. می‌توانم با یک مثال، یک کاربرد از آن را برای شما توضیح دهم. مثلاً فرض کنید در یک شـــهر، محل افرادی که با موبایل صحبت می‌کنند برای ما مهم اســـت. فردی که ساکن این شـــهر اســـت و موبایل دارد در هر لحظه در نقطه‌ای از این شـــهر است. مکان افراد تغییرپذیر است و قطعیت نـــدارد. پس مکان هر فـــرد به صورت نقطه‌ای تصادفی در این شـــهر در نظر گرفته می‌شود. از طرف دیگر هر لحظه ممکن است او با یک احتمالی شروع به صحبت با موبایلش کند یا مکالمه‌اش را تمام کند. اگر مکان همهٔ افرادی را که در یک لحظه با موبایل حرف می‌زنند قرمز کنیم، ایـــن نقطه‌های قرمز یک شکل هندسی تصادفی می‌سازند. دلیل تصادفی بودن این شکل، تصادفی بودن مکان هر فرد و تصادفی بودن صحبت کردن او با موبایل در یک لحظه است. حالا اگر در نزدیکی یک آنتن موبایل، تعـــداد زیادی نقطهٔ قرمز قرار داشـــته باشـــد، ظرفیت آنتن تکمیل اســـت و اگر افراد جدیـــدی بخواهند با موبایل صحبت کنند، پیغام «شـــبکه مشغول اســـت» را می‌شـــنوند و در آن لحظه نمی‌توانند ارتباط برقرار کنند. بررسی این شکل هندسی تصادفی، به شرکت مخابرات کمـــک می‌کند که آنتن‌ها را در جاهای مناسب نصب کند و پوشش شبکه تلفن همراه را گسترش دهد.

• **برهان:** دانش احتمـــال به مطالعهٔ چیزهایی که قطعی نیست می‌پردازد در حالی‌که احساس می‌شود ریاضی‌دانان بایـــد چیزهایی را مطالعـــه کنند که قطعی هســـتند. پس چه چیزی اینجا ثابت می‌شـــود یا بهتر بگوییم، از چه چیزهایی مطمئن می‌شویم؟

• **علیشـــاهی:** بـــرای اینکـــه کاری واقعاً یک کار ریاضی محســـوب شود، استاندارد عجیبی وجود دارد و آن هم، «اثبات» است. در جامعهٔ ریاضی‌دانان تا شما چیزی را اثبات نکنید انگار هیچ کاری نکرده‌اید. ریاضی به‌صورت جدی از زمان یونانِ باســـتان وجود داشته و برخی شاخه‌های ریاضی ۲۰۰۰ ســـال

قدمت دارند. موضوع شانس و احتمال هم موضوعی تاریخی است که بشر از قدیم با آن سر و کار داشته است. پیشرفت زندگی به تدریج احتمال را به‌صورت جدی وارد ریاضیات کرد. سابقهٔ ورود علم احتمال به ریاضی حدود ۲۰۰ سال است. پس در ریاضی، شاخهٔ نو و جوانی به‌حساب می‌آید.

بسیاری از ریاضی‌دان‌ها هم همین احساس را نسبت به احتمال داشتند و فکر می‌کردند که چون احتمال به موضوعات غیرقطعی یا تصادفی می‌پردازد، پس ریاضی نیست. حتی در حال حاضر هم در اندیشهٔ بعضی ریاضی‌دانان این مقاومت وجود دارد؛ اما «احتمال‌دان‌ها» هم حرف‌های قطعی می‌زنند، ولی حرف‌های قطعی آن‌ها دربارهٔ پدیده‌های تصادفی است. درواقع خود این پدیده‌ها قطعی نیستند ولی ما در مورد آن‌ها حرف‌های قطعی می‌زنیم.

• **میرصادقی:** مثلاً وقتی می‌گوییم «احتمال آمدن این روی سکه یک دوم است» یک جملهٔ قطعی است. ولی دربارهٔ پدیده‌ای تصادفی و غیرقطعی داریم صحبت می‌کنیم.

• **علیشاهی:** در واقع علم احتمال به شما می‌گوید اگر شما احتمال یک سری پیشامد ساده را بدانید یا بتوانید حساب کنید، می‌توانید احتمال پیشامدهای پیچیده‌تر را به‌دست آورید. جالب است که بدانید از حدود صد سال قبل، دانش احتمال توانست با روش‌های جدیدی که در این شاخه از ریاضیات به‌وجود آمده بود، به شاخه‌های دیگر ریاضی کمک کند. این اتفاق باعث شد با استفاده از روش‌های علم احتمال، مسائلی حل شود که پیش از آن، حل آن‌ها غیرممکن بود. کاری که خود من در احتمال نظری می‌کنم، از همین نوع است. به این روش‌ها، روش‌های اثباتِ احتمالاتی می‌گوییم. با یک مثال توضیح می‌دهم: مسئله‌ای قدیمی به اسم مسئلهٔ مهمانی هست که می‌گوید اگر ۶ نفر در یک مهمانی باشند، حتماً یا ۳ نفرشان هستند که دو به دو همدیگر را می‌شناسند یا ۳ نفرشان هستند که هیچ‌کدام همدیگر را نمی‌شناسند. این مسئله سال‌ها پیش ثابت شده است. حالا اگر بخواهیم در یک مهمانی، حتماً ۱۰۰ نفر باشند که یا همه هم را بشناسند یا هیچ‌کدام یکدیگر را نشناسند، چند نفر باید به این مهمانی دعوت شوند؟ توجه داشته باشید که اگر بدانیم در هر مهمانی n نفره حتماً یا صد نفر دوبه‌دو آشنا هستند یا صد نفر دوبه‌دو غریبه، آن وقت در هر مهمانی پرجمعیت‌تر هم، چنین صد نفری وجود دارد. در واقع، مسئلهٔ اصلی پیدا کردن کوچک‌ترین تعداد ممکن است. حدود ۱۰۰ سال پیش برای اولین بار جوابی به این مسئله داده شد. یعنی برای این مسئله عددی ارائه شد که ثابت می‌شد برای آن تعداد مهمان، حتماً جوابی وجود دارد. در نتیجه جواب دقیق مسئله از این عدد بزرگ‌تر نبود. اما خود این عدد خیلی خیلی بزرگ بود. از طرف دیگر می‌شد مثال‌هایی از نحوهٔ آشنایی مهمان‌ها ساخت که در آن‌ها با تعداد مهمان خیلی کمتری، آن صد آشنا یا صد غریبه وجود داشته باشد. با این حال، معلوم نبود که برای هر مهمانی با این اندازه‌ها، چنین شرایطی برقرار باشد. مثلاً اگر صد نفر که همه همدیگر را می‌شناسند دور هم جمع شوند، یک

مهمانـــی داریم که در آن، صد نفر وجود دارند که همه با هم آشنا هســـتند! اما این مثال نشان نمی‌دهد که در هر مهمانی صد نفرهٔ دیگر، صد نفر آشـــنا یا صد نفر غریبه پیدا می‌شود. نکته‌ای که وجود داشـــت این بود کـــه بین مثال‌های موجود و عدد ثابت شـــده فاصلهٔ بزرگی بود. در چنین موقعیت‌هایی ریاضی‌دان‌ها سعی می‌کنند ثابت کنند که مقدار مورد نظر از چه عددی نمی‌تواند کوچک‌تر باشـــد. پس مسئلهٔ جدید این بود که اگر مهمان‌ها از چه تعدادی کم‌تر باشـــند، مهمانی‌ای با آن تعداد پیدا می‌شـــود که در آن مهمانی، نه ۱۰۰ نفر پیدا می‌شـــوند که همه با هم آشنا باشند و نه ۱۰۰ نفر که همه با هم غریبه.

ریاضـــی‌دان معروفی بنام «اِردوش» با اســـتفاده از روش‌های احتمالاتی برای این مســـئله اثبات درخشـــانی ارائه داد. در واقع، این اثبـــات اولین مثال تاریخی از بـــه‌کار بردن چنین روش‌هایی اســـت. روش اثبات او چنیـــن بود که یک مهمانی فرضی با n مهمان را در نظر گرفت و فرض کرد که آشـــنا یا غریبه بودن هر دو نفر در این جمع، تصادفی است و با پرتاب یک سکه معلوم می‌شـــود. او برای دو نفر خاص از جمع یک بار ســـکه می‌انداخت. اگر آن ســـکه شـــیر می‌آمد آن دو نفر را آشـــنا در نظر می‌گرفت و اگر خـــط می‌آمد آن‌ها را غریبه فرض می‌کرد. بعد ســـراغ دو نفر بعـــدی می‌رفت و بار دیگر ســـکه پرتاب می‌کرد و این کار را ادامه می‌داد تا رابطهٔ هر دو نفری مشخص شود. این که آشنا یا غریبه بودن افراد با پرتاب ســـکه مشخص می‌شـــد، به اردوش اجازه می‌داد تا از قوانین احتمال در مورد پرتاب چند ســـکه اســـتفاده کند. او توانست مقداری مثل m را مشخص کند که اگر تعداد مهمان‌ها از آن کم‌تر باشـــد، احتمال اینکه در ایـــن جمع نه، صد نفر دوبه‌دو آشـــنا باشند و نه، صد نفر دوبه‌دو غریبه، مثبت می‌شود. البته اردوش این مثال‌ها را نمی‌ســـاخت، بلکه فقط به کمک دانش احتمال ثابـــت می‌کرد که چنین مثال‌هایی وجود دارند. مثل اینکه من برای شـــما ثابت کنم عدد گنگی که از صد بزرگ‌تر باشـــد وجود دارد اما مثالی از چنین عددی را به شما معرفی نکنـــم. به همیـــن دلیل هم هنوز بعضـــی از ریاضی‌دانان این نوع اثبات‌ها را دوســـت ندارند. چون نمی‌توانند آنچه را که از وجودش حرف می‌زنند برای شـــما بسازند. هر چند که ما را مطمئن می‌کنند که چنین چیزهایی وجود دارند. جالب است که هنوز هم برای این مسئله کسی نتوانسته است اثبات واقعاً بهتـــری از اثبات اردوش ارائه کند؛ چه اثبات احتمالاتی و چه اثبات غیراحتمالاتی.

محدثه رجائی، متولد ۱۳۶۳ تهران
دانشجوی دکتری ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس
زمینه مورد علاقه و تحقیقات: احتمال و فرآیندهای تصادفی.

میرامید حاجی‌میرصادقی، متولد ۱۳۶۳ تهران دکترای ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف/ دانشگاه پاریس ۶ فرانسه
محل کار فعلی: دانشگاه صنعتی شریف
زمینه‌های مورد علاقه و تحقیقات: احتمال، آمار.

علی خزلی، متولد ۱۳۶۶ گیلانغرب (استان کرمانشاه) مدرک: دکتری ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف / محل کار فعلی: محقق پسادکتری ریاضی، پژوهشگاه دانش های بنیادی / زمینه: فرآیندها و گراف های تصادفی، ریاضی مالی.

کسری علیشاهی، متولد ۱۳۵۸ اصفهان
مدرک : دکتری ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف / عضو هیات علمی دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف/زمینه‌های مورد علاقه : فرآیندهای تصادفی، روش‌های احتمالاتی، آمار و علوم داده.

پی‌نوشـــت: از خانم محدثه رجائی که هنگام گفت‌وگو همراه ما بودند و در تنظیم متن این گفت‌وگو ما را یاری کردند بسیار سپاسگزاریم.